Chapter 1

Reseni linearni diferencialni rovnice 1. radu.

Nejprve si ukazeme, jak nalezt reseni takzvane homogenni rovnice. Dale budeme hledat mnozinu vsech reseni dane linearni diferencialni rovnice 1. radu. Nejprve budeme predpokladat, ze reseni existuje a z rovnice odvodime, jaky tvar jiz toto reseni musi mit (tedy nalezneme nadmnozinu mnoziny reseni). V druhem kroku pak overime, ze vsechny prvky teto nadmnoziny jsou resenimi a tedy, ze se nejedna o ostrou nadmnozinu, ale o samotnou mnozinu reseni.

Necht p, q jsou realne funkce, ktere jsou spojite na svych definicnich oborech D_p, D_q. Necht (a, b) je nejaky maximalni podinterval mnoziny $D_p \cap D_q$. Nadale se omezime pouze na tento podinterval. Pro ostatni maximalni otevrene podintervaly by se postupovalo obdobne. Mejme rovnici

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t). \tag{1.1}$$

Vzhledem k existenci vlastni derivace funkce y musi byt reseni spojite. Pak ale prava strana rovnice (1.1) je spojita a y tedy musi byt $\mathcal{C}^1((a, b))$. Zobrazeni $L : \mathcal{C}^1((a, b)) \to \mathcal{C}((a, b))$ definovane predpisem

$$L(y(t)) := y'(t) - p(t)y(t)$$

je linearni a tedy mnozina vsech reseni rovnice (1.1) je rovna $Ker(L) + y_p$, kde y_p je nejake reseni teto rovnice. Prvky mnoziny $Ker(L)$ jsou reseni takzvane homogenni rovnice

$$y'(t) = p(t)y(t) \tag{1.2}$$

Homogenni rovnice (1.2) je specialni pripad rovnice se separovannymi promennymi. Vyresime ji tedy metodou pro tyto rovnice a obdrzime, ze obecne reseni $y_h(t)$ ma tvar

$$y_h(t) = Ke^{P(t)},\ K \in \mathbb{R},\ x \in (a, b),$$

kde $P(t)$ je nejaka primitivni funkce k funkci $p(t)$. Postup reseni:

(0) $g(y) = y$, $h(t) = p(t)$.

(1) $I = (a, b)$.

(2) $g(y) = 0$ prave tehdy kdyz $y = 0$, $y_{st}(t) = 0$, $t \in (a, b)$.

(3) $J^+ = \mathbb{R}^+$, $J^- = \mathbb{R}^-$.

(4) $P(t) = \int p(t)dt$, $G(y) = \log|y|$.

(5) $M_c^{\pm} = \{t \in I;\ P(t) + c \in G(J^{\pm}\} = I$, $y^{\pm}(t) = G^{-1}(P(t) + c) = \pm e^{P(t)+c}$. Obecne reseni ma tedy tvar $y_K(t) = Ke^{P(t)}$, $K \in \mathbb{R}$ $(K = \pm e^c)$, $t \in (a,b)$.

(6) Definicni obor reseni je interval (a,b), tedy nelze lepit a reseni z (5) jsou maximalni reseni.

Nyni budeme predpokladat, ze existuje reseni y_p rovnice (1.1). Z drivejska jiz vime, ze y_p musi byt $\mathcal{C}^1$ a tedy funkce

$$K(t) := y_p(t)e^{-P(t)} \in \mathcal{C}^1((a,b)). \tag{1.3}$$

Z rovnice (1.3) plyne, ze $y_p(t) = K(t)e^{P(t)}$. Dosadime toto do puvodni rovnice:

$$\begin{aligned} p(t)y_p(t) + q(t) \overset{(1.1)}{=} y_p'(t) = \left(K(t)e^{P(t)}\right)' &= K'(t)e^{P(t)} + K(t)P'(t)e^{P(t)} \\ &\overset{P'=p}{=} K'(t)e^{P(t)} + K(t)p(t)e^{P(t)} \overset{y_p=K*e^P}{=} K'(t)e^{P(t)} + p(t)y_p(t). \end{aligned}$$

Tedy

$$K'(t)e^{P(t)} = q(t) \implies K(t) = \int q(t)e^{-P(t)}dt.$$

Vsimneme si, ze integral existuje, neb funkce $q(t)e^{-P(t)}$ je spojita. Ukazali jsme tedy, ze pokud nejake reseni existuje, tak jiz musi mit tvar $y(t) = (K(t) + K)e^{P(t)}$, $t \in (a,b)$, kde funkce $P(t)$ a $K(t)$ jsou primitivnimi funkcemi k funkcim $p(t)$ a $q(t)e^{-P(t)}$ na intervalu (a,b).

Nyni ukazeme, ze takto nalezene funkce jsou opravdu resenimi rovnice (1.1) na intervalu (a,b). Jiz drive jsme si vsimli, ze dane primitivni funkce na intervalu (a,b) existuji. Tim padem existuje i funkce $f_K(t) := (K(t) + K)e^{P(t)}$. Nyni dosadime tuto funkci do rovnice (1.1):

$$\begin{aligned} f_K'(t) =& K'(t)e^{P(t)} + (K(t) + K)p(t)e^{P(t)} = qe^{-P}e^P + p(t)f_K(t) \\ =& p(t)f_K(t) + q(t),\ K \in \mathbb{R},\ t \in (a,b). \end{aligned}$$

Takze kazda z nami nalezenych funkci $f_K(t)$ je resenim nasi rovnice na intervalu (a,b).

Na zaver si uvedomime, ze funkce $f_K(t)$ se od sebe lisi o nasobek nenulove funkce $e^{P(t)}$ a tedy pro zadanou pocatecni podminku $y(t_0) = y_0$ nemuze existovat vice nez jedno reseni. Na druhou stranu, pokud vhodne zvolime primitivni funkce $P(t), K(t)$ a konstantu K, tak nalezneme reseni, ktere tuto pocatecni podminku splnuje:

$$\begin{aligned} P(t) =& \int_{t_0}^{t} p(x)dx, \\ K(t) =& \int_{t_0}^{t} q(x)e^{-P(x)}dx, \\ K =& y_0. \end{aligned}$$

Ukazali jsme tedy, ze pro kazdou pocatecni podminku existuje prave jedno reseni.

Poznamka 1.1. *Pokud bychom pouze vzali funkce $(K(t) + K)e^{P(t)}$ a dosazenim overili, ze jsou to reseni, tak bychom nevedeli, zda nahodou neexistuji jeste jina reseni. Proto je to potreba provest cele.*